Les apprentissages numériques

Chapitre 23

Emmanuel Sander et Jean-François Richard

Plan du chapitre

Introduction

La soustraction « 8–3 = 5 » fournit la solution aussi bien au problème : « Laurent avait 8 bonbons. Il en a mangé 3. Combien lui en reste-t-il ? » qu'à : « Laurent avait 3 bonbons, puis son ami lui a donné d'autres bonbons. Il a maintenant 8 bonbons. Combien de bonbons a-t-il reçus ? » Un élève s'y prend-il pour autant de la même manière pour les résoudre ? Si la résolution de l'un de ces deux énoncés est travaillée en classe, la résolution de l'autre s'en trouve-t-elle améliorée ? Comment amener un élève à percevoir que l'un comme l'autre de ces énoncés relève de la même notion mathématique, en l'occurrence celle de soustraction ? Ces questions dessinent le plan du chapitre, qui examinera les processus en jeu dans la résolution d'un problème et leurs manifestations pour le transfert d'apprentissage pour aborder enfin la question, éducative et développementale, de l'aide à la conceptualisation d'une notion.

Les processus à l'œuvre dans la résolution d'un problème mathématique

Distinguer à l'intérieur des notions : le cas des typologies de problèmes arithmétiques à structure additive

Les deux énoncés introductifs décrivent des situations différentes. Le premier porte sur la recherche d'une quantité restante, une fois qu'un événement a conduit à la diminution d'une quantité initiale, alors que le second porte sur la valeur d'un accroissement, étant connues les valeurs antérieures et postérieures à cet accroissement. Au début des années 1980, des chercheurs ont cherché à mettre en évidence ce qui, du point de vue des significations véhiculées, unit des situations de problèmes pourtant déclinables à l'infini (en remplaçant les bonbons du premier exemple par des chocolats, en les offrant ou en les perdant plutôt qu'en les mangeant, etc.). Il s'agissait d'établir une typologie de caractéristiques communes à des familles d'énoncés et aisément perçues par les élèves, se situant toutefois à un niveau moins abstrait qu'il serait fondé de le faire sur le plan mathématique. Les travaux ont conduit à élaborer des classifications des types d'énoncés qui reposent sur une même notion mathématique, tels que les problèmes dénommés *à structure additive à une étape*, dont la solution s'obtient par une seule addition ou soustraction. Nesher (1982) distingue ces problèmes selon que la relation entre les éléments est statique (« Paul a 5 billes dans sa poche. 3 sont vertes et les autres sont rouges. Combien Paul a-t-il de billes rouges dans sa poche ? » ou encore « Pierre a 8 billes, il en a 5 de plus que Paul. Combien Paul a-t-il de billes ? ») *versus* dynamique (« Victor avait 5 billes. Il en donne 2 à Joe. Combien de billes lui reste-t-il ? »). Carpenter et Moser (1982) raffinent cette distinction « statique/dynamique » selon la nature de l'opération effectuée sur un tout composé de deux parties (inclusion ou disjonction) et selon la nature de l'évolution de la situation entre le début et la fin du problème (augmentation ou diminution). Les classifications les plus fréquemment citées sont celles de Vergnaud (1982) et de Riley *et al.* (1983), qui distinguent les cas de *transformation*, dynamiques, évoluant d'un état initial vers un état final (« Jean avait 3 billes. Paul lui a donné 5 billes. Combien de billes a-t-il maintenant ? »), ceux de *combinaison*, statiques, dans lesquels deux parties forment un tout et pour lesquels le problème consiste en la recherche du cardinal du tout ou d'une partie (« Jean a 3 billes et Paul a 5 billes. Combien ont-ils de billes à eux deux ? »), ceux de *comparaison*, qui sont également statiques, mais pour lesquels des quantités sont comparées à l'aide de relations de type : « plus que/moins que » (« Jean a 8 billes. Paul a 5 billes. Combien Jean a-t-il de billes de plus que Paul ? »). Vergnaud (1982) prend également en compte les relations entre les valeurs à combiner. Des différences de difficulté sont observées à l'intérieur de ces catégories : les problèmes de transformation sont en général mieux réussis que ceux de comparaison, et, parmi les problèmes de transformation, ceux pour lesquels la question porte sur l'état initial sont plus difficiles que ceux pour lesquels la question porte sur l'état final (De Corte et Verschaffel, 1987). Ainsi, ces typologies trouvent leur pertinence psychologique dans le fait que du point de vue de l'élève, les ressemblances entre énoncés sont supposées perçues à ce niveau de catégorisation, considéré comme le niveau pertinent auquel expliquer les processus à l'œuvre dans une résolution (Richard et Sander, 2000 ; confère aussi Thevenot et Barouillet, 2015 pour une revue de question récente).

La théorie des schémas et ses limites

La théorie des schémas (Kintsch et Greeno, 1985) a cherché à rendre compte de ces processus. Elle se fonde à la fois sur les distinctions entre classes de problèmes que nous venons de décrire et sur les travaux sur la compréhension de texte (Van Dijk et Kintsch, 1983). Elle comporte des étapes aboutissant à une résolution experte par utilisation de schémas, dans lesquels des caractéristiques abstraites interviennent dans la représentation de l'élève : par exemple, pour « Laurent avait 8 bonbons. Il en a mangé 3. Combien lui en reste-t-il ? », il s'agirait de repérer un état initial – *connu* –, une diminution – *connue* – et un état final – *recherché*–, puis d'appliquer la stratégie qui mène à la solution, dans le cas présent soustraire la diminution à l'état initial. Fayol et Abdi (1986) avaient montré que le fait de placer la question au début plutôt qu'à la fin d'un problème arithmétique améliore les performances. Ils y avaient vu l'indication que la connaissance du but à atteindre facilite l'activation du schéma pertinent et son instanciation par les éléments du problème au fur et à mesure de sa lecture. Cette théorie suppose que l'élève traite de manière équivalente des problèmes qui appartiennent à une même classe de la typologie dès lors que le schéma associé est acquis.

Pourtant, comme une recherche de Hudson (1983) l'avait montrée, la formulation d'un énoncé peut grandement influencer les performances y compris à l'intérieur d'une classe d'une typologie. Il a montré qu'un problème de comparaison énoncé sous sa forme stéréotypique « Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien d'oiseaux y a-t-il de plus que de vers ? » est considérablement plus difficile que « Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien d'oiseaux n'auront pas de vers ? » (17 % *versus* 83 % de réussite à 5 ans, et 64 % *versus* 100 % à 7 ans). Comment deux énoncés qui devraient évoquer un schéma identique, ici de recherche d'écart entre deux termes connus qu'il s'agit de comparer, peuvent-ils être de difficulté si différente ?

L'approche des modèles mentaux

Ce type de phénomène a conduit au développement de théories toujours inspirées des travaux en compréhension de texte, mais cette fois privilégiant la notion de modèle mental selon laquelle les élèves font appel à une représentation bien plus proche de l'énoncé que ne le suppose la théorie des schémas, et qui prend même le contrepied de cette dernière dans la mesure où un tel modèle est une représentation particularisée, homologue à une situation du monde réel, qui incarne le problème en détail, en précisant les agents, les actions et les relations entre les entités du problème (Reusser, 1990 ; Staub et Reusser, 1995).

Plusieurs travaux mettent en effet en évidence des phénomènes difficilement explicables par la théorie des schémas et dont la théorie des modèles mentaux peut rendre compte. Ainsi, Moreau et Coquin-Viennot (2003) montrent que l'information superflue pour résoudre un problème conserve une utilité même pour les meilleurs élèves. Des élèves de CM1 résolvent des problèmes arithmétiques riches en informations superflues. Il leur est ensuite demandé de dériver des énoncés « aussi courts que possible » et des énoncés « aussi faciles à comprendre que possible ». On pourrait s'attendre à ce que les élèves performants, ayant construit le schéma adéquat, proposent des énoncés similaires pour le problème court et celui facile à comprendre, résultants de l'instanciation du schéma par les éléments spécifiques de l'énoncé. En fait, il s'avère que même les meilleurs élèves conservent de l'information superflue pour rendre le problème plus facile à comprendre. Thevenot *et al.* (2007), en s'appuyant sur les résultats de Fayol et Abdi (1986) cités plus haut, obtiennent des résultats conformes à l'hypothèse selon laquelle la résolution est plutôt guidée par un modèle mental que par un schéma. Ils montrent pour cela que l'effet facilitateur de la question placée en début d'énoncé est plus important pour les élèves les moins performants. Si la résolution dépendait de seuls schémas, on s'attendrait à ce que les meilleurs élèves disposent déjà des schémas pertinents et soient ceux qui bénéficient le plus du placement de la question en début d'énoncé en les activant, or l'inverse est observé.

Ainsi, un modèle mental peut être le support de la résolution d'un problème arithmétique sans qu'un schéma ait été construit. Il peut conduire de jeunes enfants à trouver la solution en simulant mentalement l'action décrite lorsqu'elle est familière et avant tout apprentissage scolaire de l'opération arithmétique concernée. Cela peut expliquer des réussites très élevées pour certains énoncés, comme pour l'énoncé « Jean avait 5 billes. Il en a donné à Paul. Maintenant Jean a 3 billes. Combien Jean a-t-il donné de billes à Paul ? » en fin de maternelle et avant tout enseignement de la soustraction (Fayol, 1989 ; De Corte et Verschaffel, 1987).

Le transfert d'apprentissage

Nous abordons maintenant la question des processus de transfert d'apprentissage : par quels processus la résolution d'un énoncé particulier peut-elle se transférer à un nouvel énoncé ? Dans la perspective de la théorie des schémas, il s'agit avant tout de repérer que le même schéma de problème s'applique. Le transfert devrait donc être systématique entre problèmes relevant du même schéma. En revanche, si l'on penche vers l'idée que les élèves appuient leur résolution sur des modèles mentaux, le transfert semble plutôt relever de processus représentationnels généraux. Certains travaux sur le transfert d'apprentissage apportent des éclairages utiles, conduisant à montrer des limites des théories des schémas comme des modèles mentaux. Ils invitent à aborder une perspective qui fait intervenir des représentations abstraites comme les schémas tout en étant directement ancrées sur les situations concrètes comme les modèles mentaux. Il s'agit des structures induites (Bassok, 2001).

La structure induite comme guide du transfert

Selon le type de problème concerné, certains habillages s'avèrent plus adaptés que d'autres à la résolution. Par exemple, une situation de différence d'âge, à la différence d'une situation de mélange, facilite une résolution d'équations à deux inconnues (Blessing et Ross, 1996) : le problème « Wendy est 4 fois plus âgée que sa nièce. Dans 5 ans, elle sera 3 fois plus âgée que sa nièce. Quel âge ont Wendy et sa nièce ? » se résout plus facilement que celui, soluble par la même méthode, de mélanges : « Un maçon mélange 4 fois plus de ciment dans un container que dans un autre. Il rajoute à chacun d'eux 5 litres de ciment. Maintenant, il y a trois fois plus de ciment dans le premier container que dans le second. Combien de litres de ciment y a-t-il dans chaque container ? » Pour différentes structures de problème, Blessing et Ross ont mis en évidence un habillage approprié qui facilite la résolution, un habillage neutre et un habillage inapproprié rendant difficile la résolution.

Permettant de rendre compte de ce phénomène, des recherches sur le transfert, portant généralement sur des populations adultes et sur la résolution de problèmes mathématiques complexes, comme des problèmes de combinatoire, ont fait émerger la notion de structure induite (Bassok, 2001). Les traits superficiels du problème fournissent un ensemble d'indices qui conduit à induire une structure qui se substitue à la structure mathématique et détermine ensuite les transferts entre problèmes. Ainsi, le fait qu'une variable soit caractérisée par des changements brusques de valeur comme pour une action cotée en bourse, ou conçue comme évoluant sans rupture au fil du temps comme l'accélération d'un véhicule, influence le transfert entre problèmes. Ce transfert est asymétrique : élevé et rapide du premier cas vers le second, rare et laborieux dans la configuration inverse (Bassok et Olseth, 1995).

Les effets de congruence sémantique

Les relations qu'entretiennent les objets de l'énoncé influencent la structure de problème induite spontanément par les participants (Bassok, Chase et Martin, 1998). Des étudiants de premier cycle à l'université à qui l'on demande de construire des problèmes arithmétiques à partir de la donnée d'un couple d'entités (par exemple des pommes et des paniers, ou encore des pommes et des oranges) élaborent des problèmes qui rendent congruentes les relations sémantiques entre les couples d'objets (par exemple pommes et paniers sont dans une relation contenant/contenu) avec les relations mathématiques entre les opérateurs (dividende/diviseur). Ainsi, le couple (pommes, paniers) conduit à la construction de problèmes de division alors qu'une structure additive est privilégiée par les participants lorsqu'il s'agit de pommes et d'oranges, le terme pomme perdant sa fonction de contenu relativement au panier et acquérant un statut symétrique relativement aux oranges. Martin et Bassok (2005) montrent, auprès de collégiens, de lycéens et d'étudiants en premier cycle universitaire, que la difficulté de résolution dépend de la nature des relations entre les objets. Les problèmes qui contiennent des indices sémantiques congruents avec la structure mathématique sont mieux réussis que ceux pour lesquels les entités ont un statut symétrique du fait de leur appartenance à une catégorie commune. Par exemple, un problème de division mettant en scène un vase et des marguerites (relation fonctionnelle de contenant à contenu congruente avec l'opération de division) est mieux réussi qu'un problème de division comprenant des vis et des boulons (relation symétrique non congruente avec l'opération de division).

L'influence de l'expertise

Les variations de difficulté entre problèmes dépendent également des connaissances préalables de celui qui le résout, comme les recherches portant sur l'influence du niveau d'expertise dans la résolution de problèmes mathématiques l'ont montré. Ainsi, Silver (1981 ; voir aussi Schoenfeld et Herrmann, 1982) a sollicité des élèves de collège pour résoudre et classer seize énoncés, construits par le croisement de quatre stratégies de résolution et de quatre thématiques abordées dans l'énoncé : les élèves commettant le plus d'erreurs réalisent des regroupements en s'appuyant sur les ressemblances thématiques (par exemple des problèmes de mélange) tandis que ceux qui réussissent le mieux réunissent les énoncés qui se résolvent par la même stratégie et relèvent de la même notion mathématique (par exemple un calcul de moyenne pondérée).

La catégorisation des énoncés est ainsi différente selon le degré d'expertise, ce qui influence le transfert d'apprentissage : Novick (1988) a montré que les similitudes thématiques entre des problèmes reposant sur des principes de solution différents influencent le transfert entre problèmes pas seulement pour les élèves en difficulté, mais aussi pour les meilleurs. Toutefois, si tous ont tendance à réaliser un transfert négatif dans un premier temps en appliquant la procédure de solution inadaptée apprise lors de la résolution du premier problème, les élèves les plus performants tentent rapidement d'autres solutions alors que les autres persévèrent dans leur application de variantes de la stratégie inappropriée. Cela suggère que la représentation des élèves les moins performants est fondée sur la thématique du problème et concerne ce qui est communément appelé son *habillage*. À l'inverse, les meilleurs intègrent dans leur représentation des éléments de structure, ceux sur lesquels reposent la notion mathématique et la stratégie de résolution, et qui conditionnent un transfert d'apprentissage positif.

La question du transfert réussi et de l'asymétrie de transfert recouvrent largement celle de la nature de la représentation induite. Si la structure induite par le problème initial est identique ou plus générale que celle induite par le nouveau problème, le transfert sera élevé ; dans le cas contraire, il sera faible. Avec l'expertise, la nature des représentations induites par les élèves est modifiée, ce qui explique les effets observés (Richard et Sander, 2000 ; Sander et Richard, 2005).

Le recodage comme cheminement de conceptualisation

L'analyse sémantique des énoncés

L'efficience d'un modèle mental dépend du problème à résoudre. Le modèle mental peut en effet parfois conduire à l'impasse, comme le montre une expérience de Schliemann, Araujo, Cassundé, Macedo et Nicéa (1998) dans laquelle deux groupes d'enfants brésiliens non scolarisés de neuf à quatorze ans, qui font du commerce de rue, résolvent chacun l'un des deux problèmes suivants : « Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros l'un ? » et « Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ? ». L'addition itérée de 3 objets à 50 cruzeiros, soit 50 + 50 + 50, conduit au résultat pour le premier énoncé, alors que pour le second, cette même stratégie aboutit à pas moins de cinquante additions : 3 + 3 + … + 3. Or il s'avère que le taux de réussite est de 75 % pour le premier énoncé et de 0 % pour le second. Pour résoudre le second problème afin de concevoir que 3×50 équivaut à 50×3, un enseignement est nécessaire, alors que le modèle mental de la situation et une simulation mentale de celle-ci sont suffisants pour le premier énoncé. Brissiaud et Sander (2010 ; confère également Brissiaud, 2002 ; Gvozdik et Sander, 2016) ont montré le caractère systématique de ce phénomène pour une large diversité de problèmes. Ainsi un énoncé tel que « Paul a 27 billes. Il en gagne. Maintenant il en a 31. Combien a-t-il gagné de billes ? » est presque deux fois mieux réussi en CE1 que son homologue dans lequel la valeur 4 remplace la valeur 27. On pourrait penser qu'il s'agit d'une question de taille des nombres, mais le phénomène réciproque s'observe pour l'énoncé « Paul a 31 billes. Il en perd 27 à la récréation. Combien lui en reste-t-il ? » qui est cette fois beaucoup plus difficile que son homologue avec la valeur 4 substituée à 27. Des caractéristiques des situations décrites font donc, pour des valeurs numériques données, qu'un énoncé peut être associé à une procédure efficiente ou non : la simulation mentale de la situation évoquée par le premier scénario oriente vers un comptage mental en avançant de 27 jusqu'à 31, ce qui ne pose pas de difficulté. À l'inverse, si la valeur de départ est 4, le comptage de tête de 4 jusqu'à 31 n'est pas praticable. Pour les énoncés suivants, il est à l'inverse aisé de soustraire mentalement 4 de 31 mais impraticable de lui soustraire 27. Une stratégie gagnante serait que l'élève se libère du contenu spécifique de l'énoncé pour se lancer dans une stratégie de résolution opportuniste selon l'efficience de la simulation mentale, autrement dit aller de 27 à 31 ou ôter 4 de 31 mais pas l'inverse. Gamo, Sander et Richard (2010 ; confère également Gamo, Nogry, Sander, 2014 et Gros, Thibaut et Sander, 2015) ont montré l'influence de ce phénomène sur le transfert d'apprentissage, conduisant à observer un transfert pauvre ou négatif dans la résolution de problèmes additifs solubles par plusieurs stratégies : les sujets, y compris adultes, ignorent majoritairement la stratégie optimale lorsque les structures induites ne sont pas assimilables. Cela engage à s'intéresser à la nature des caractéristiques des problèmes qui conduisent à la construction d'une certaine représentation plutôt que d'une autre et aux possibilités de faire évoluer une représentation spontanément induite pour favoriser la mise en place de stratégies opportunistes.

Sur le plan des apprentissages arithmétiques, cela suggère de réinvestir un énoncé de problème et de guider l'élève dans l'analyse des relations sémantiques de cet énoncé afin de lui montrer comment cette analyse conduit au choix d'une opération pour résoudre le problème. Cette analyse peut le conduire à construire de nouvelles catégories, plus générales que celles relevant directement de la situation décrite et qui constituent la sémantique mathématique des opérations.

Le cœur de la question est donc la correspondance existant entre les propriétés des situations décrites par les énoncés, liées à la sémantique de la vie quotidienne, et les propriétés mathématiques en jeu. Il s'agit d'un phénomène majeur à prendre en compte pour l'enseignement des mathématiques. La résolution de problème permet de faire découvrir aux élèves les contextes sémantiques de mise en œuvre des notions mathématiques, notamment quelles sont les relations entre les entités de l'énoncé qui permettent l'utilisation des opérations arithmétiques. De manière générale, il est donc crucial de déterminer sur quelle base on peut faire le choix des situations-problèmes permettant de mettre en scène une notion mathématique de manière à ce qu'elle se généralise le plus facilement possible à tous les contextes de problèmes où elle est pertinente.

Le recodage sémantique

Pour cela, un processus de recodage sémantique, qui consiste à se représenter un type d'énoncé de problème en lui attribuant des propriétés attribuées spontanément à un autre type d'énoncé pourrait permettre de faire progresser l'élève. Un tel processus se fonde sur l'idée que les catégories de problèmes ont certes des différences sémantiques entre elles, mais dans la mesure où les problèmes relèvent de la même notion, ces différences sont non pertinentes mathématiquement : ce sont sur les ressemblances qu'il convient de s'appuyer, car elles justifient l'identité de procédure de résolution. Il existe une grande diversité de situations de problèmes, mais on peut, par recodage sémantique, conduisant à appliquer à un problème le schéma de description d'un autre type de problème, faire apparaître l'analogie entre deux problèmes en apparence très différents. On peut par exemple recoder un problème de transformation en un problème de combinaison : « Pierre a dépensé 15 euros de l'argent de sa tirelire pour acheter un jeu, il lui reste 29 euros. Combien avait-il dans sa tirelire ? ». Un élève qui ne sait pas comment répondre à cette question devrait pouvoir se demander à quel moment il avait le plus d'argent. S'il se pose cette question, la réponse est simple, c'est avant l'achat. Cela oriente le codage vers l'idée que ce qu'il avait au début c'est ce qui lui reste et en plus ce qu'il a dépensé, ce qui justifie une addition. Ainsi, l'élève est amené à décomposer l'argent que Pierre avait à l'origine entre ce qu'il a dépensé et ce qui lui reste : il s'agit donc non plus de chercher une valeur initiale en connaissant la quantité perdue et la valeur restante, ce qui demanderait de remonter dans le temps dans son raisonnement sans que la simulation mentale permette d'associer une opération arithmétique particulière, mais de chercher le tout à partir de la connaissance de chaque partie, ce qui est une des situations les mieux maîtrisées par les élèves. Dans cet exemple, il y a recodage sémantique dans la mesure où un problème de transformation est réinterprété avec la grille de lecture d'un problème de combinaison classique tel que « Pierre a 29 euros dans sa poche droite et 15 euros dans sa poche gauche. Combien a-t-il d'euros en tout ? » Une autre manière de favoriser le recodage sémantique est d'introduire des énoncés ambigus quant à leur appartenance à tel ou tel classe de la typologie, ce qui favorise le recodage d'une classe vers une autre : par exemple, un énoncé comme « En partant à l'école, Pierre avait dans sa poche des billes rouges et des billes bleues. Il perd ses 5 billes bleues, mais il lui reste ses 3 billes rouges. Combien Pierre avait-il de billes dans sa poche en partant à l'école ? », se prête aisément à la fois à un codage comme problème de transformation avec question sur l'état initial et comme problème de combinaison avec la recherche d'un tout connaissant chacune des parties. Des travaux ont pu montrer l'effet bénéfique du travail en classe de ce type d'énoncés (Sander et Fort, 2014 ; de Longuemar et Sander, 2016) et en général d'une démarche systématique de recodage conduisant les élèves à être en mesure d'envisager la diversité des stratégies possibles pour résoudre un problème, fondée sur une réinterprétation de la situation, et qui oriente également la conception d'évaluations (Scheibling-Sève, Eichy, Pasquinelli et Sander, 2016).

La prise en compte des relations sémantiques présentes dans les énoncés de problème est un levier extrêmement puissant pour permettre à l'élève de choisir à bon escient une stratégie de résolution pertinente, et le recodage sémantique est un levier extrêmement puissant également pour élaborer une interprétation alternative du problème lorsque l'analyse sémantique première ne conduit pas à une stratégie gagnante. Un des enjeux majeurs de l'apprentissage et de l'enseignement est de permettre aux élèves d'avoir plusieurs lectures possibles d'une situation.

Conclusion

L'approche du recodage sémantique diffère profondément de celle qui met l'accent sur les schémas de problèmes. Cette dernière incorpore les propriétés qui distinguent les catégories de problèmes, mais qui ne sont pas pertinentes sur le plan mathématique, puisque, quelle que soit la catégorie à laquelle il appartient, un problème à structure additive se résout par le calcul d'une somme ou d'une différence. Insister sur les différences sémantiques entre les problèmes risque de créer un obstacle à la perception des propriétés communes aux différentes catégories de problèmes, lesquelles sont de ce fait plus abstraites et donc plus proches des propriétés mathématiques. Il est important de distinguer l'usage du schéma comme guide de la résolution, ce que prône la théorie des schémas, de l'usage d'un schéma figuratif qui peut aider à comprendre l'histoire racontée dans l'énoncé et aider à extraire du texte les éléments pertinents et à faire abstraction des traits qui diffèrent à l'intérieur d'une catégorie de problème.

Les reformulations de l'énoncé ont été beaucoup étudiées et leur effet positif a été souligné (De Corte, Verschaffel et De Win, 1985). Toutefois, contrairement à l'hypothèse faite au départ, les reformulations situationnelles, qui précisent le scénario de l'histoire racontée dans l'énoncé, n'ont pas d'effet conséquent sur la réussite comme l'ont montré Vicente, Orrantia et Verschaffel (2007), à la différence des reformulations conceptuelles qui fournissent des indices supplémentaires pour identifier la catégorie du problème. Devrait-on pour autant en conclure qu'il faudrait proposer des énoncés qui facilitent cette identification? Cela est discutable, car on augmenterait le taux de réussite au détriment sans doute de l'apprentissage, car si la reformulation est capitale elle doit provenir de l'élève. C'est donc sur la capacité de reformulation qu'il est essentiel de focaliser l'instruction, de manière à ouvrir de nouvelles voies pour tenter des solutions, lorsque la première représentation construite conduit à un blocage.

Des interventions scolaires orientées vers le recodage sémantique devraient y contribuer dans la mesure où ce recodage permet d'explorer le champ des propriétés des situations auxquelles une notion mathématique donnée peut s'appliquer. Nombre d'auteurs insistent sur l'importance de la flexibilité comme un objectif majeur des apprentissages mathématiques et cet objectif est également mis en avant dans les réformes récentes des programmes de mathématiques dans différents pays (voir Vershaffel, Luwel, Torbeyns et Van Dooren, 2009). Cela recouvre à la fois la capacité d'utiliser plusieurs stratégies et de choisir celle qui est la plus adaptée aux particularités du problème.

L'approche de l'analyse sémantique des situations décrites dans les problèmes qui vise à ancrer les apprentissages mathématiques sur l'analyse des propriétés des situations et à permettre à l'élève de cheminer dans le réseau sémantique des propriétés associées aux opérations partage pleinement cet objectif. Le défi est d'envergure, car du point de vue des jeunes élèves les problèmes d'addition/soustraction (comme ceux de multiplication/division) relèvent de situations peu liées les unes aux autres et il s'agit d'aboutir à la possibilité de développement d'un codage plus général qui embrasse l'ensemble de ces situations et permette d'en percevoir l'unité.

Références

Bassok, M. (2001). Semantic alignments in mathematical word problems. In D. Gentner, K. J. Holyoak, & B. N. Kokinov (Eds.), *The analogical mind : Perspectives from cognitive science* (pp. 401–433). Cambridge, MA : The MIT Press.

Bassok, M., & Olseth, K. (1995). Object-based representations : Transfer between cases of continuous and discrete models of change. J Exp Psychol. : Learning. *Memory and Cognition*, *21*, 1522–1538.

Bassok, M., Chase, V. M., & Martin, S. A. (1998). Adding and Oranges : Alignment of Semantic and Formal Knowledge. *Cognitive Psycholoy.*, *35*, 99–134.

Blessing, S. B., & Ross, B. H. (1996). Content Effects in Problem Categorization and Problem Solving. *J Exp Psychol. Learning, Memory, and Cognition*, *Vol. 22*(3), 792–810.

Brissiaud, R. (2002). Psychologie et didactique : choisir des problèmes qui favorisent la conceptualisation des opérations artihmétiques. In J. Bideaud & H. Lehalle (Eds.), *Traité des Sciences Cognitives, Le développement des activités numériques chez l'enfant.* Paris : Lavoisier.

Brissiaud, R., & Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving : a Situation Strategy First Framework. *Developmental Science*, *13*(1), 92–107.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The Development of Addition and Subtraction Problem Solving Skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction : Developmental Perspective* (pp. 9–24). N.J. : Lawrence Erlbaum Associates.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' solution strategies of elementary addition and subtraction word problems. *Journal of Research in Mathematics Education*, *18*, 363. 38.

De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solution. *Journal of Education and Psychology*, *77*, 460–470.

Fayol, M. (1989). *L'enfant et le nombre*. Neuchâtel, Paris : Delachaux et Niestlé.

Fayol, M., & Abdi, H. (1986). Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 à 10 ans. *Eur J Psych Ed*, *I*(1), 41–58.

Gamo, S., Sander, E., & Richard, J.-F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning and Instruction*, *20*, 400–410.

Gamo, S., Nogry, S., & Sander, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire. *Psychologie Française*, *59*(3), 215–229.

Gros, H., Thibaut, J.-P., & Sander, E. (2015). Robustness of semantic encoding effects in a transfer task for multiple-strategy arithmetic problems. In : *Proceedings of the 37th Annual Meeting of the Cognitive Science Society. Pasadena, California, USA*.(pp. 818–823).

Gvozdic, K., & Sander, E. (2016). Persistence of intuitive strategies on word problems - extension of the Situation Strategy First framework. In : *Communication affichée présentée à la Budapest CEU Conference on Cognitive Development. Budapest, Hungary, 7–9 janvier.*

Hudson, T. (1983). Correspondences and Numerical Differences between Disjoint Sets. *Child Development*, *54*(1), 84–90.

de Longuemar, G., & Sander, E. (2016). Learning to overcome inadequate intuitive strategies in arithmetic word problem solving. In : *Communication affichée présentée à la Budapest CEU Conference on Cognitive Development. Budapest, Hungary, 7–9 janvier.*

Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, *92*(1), 109–129.

Moreau, S., & Coquin-Viennot, D. (2003). Comprehension of arithmetic word problems by fifth-grade pupils : Representations and selection of information. *British J Educ Psychol.*, *73*, 109–121.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction : Developmental perspective*. Erlbaum Lawrence : Hillsdale.

Novick, L. R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. J Exp Psychol. : Learning. *Memory and Cognition*, *14*, 510–520.

Reusser, K. (1990). From text to situation to equation : Cognitive simulation of understanding and solving mathematical word problems. *European Journal in a International Context.*, *2*(2), 477–498.

Richard, J.-F., & Sander, E. (2000). Activités d'interprétation et de recherche de solution dans la résolution de problèmes. In J.-N. Foulin & C. Ponce (Eds.), *Les apprentissages scolaires fondamentaux* (pp. 91–102). Bordeaux : Éditions du CRDP.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsberg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 153–196). New York : Academic Press.

Sander, E., & Richard, J.-F. (2005). Analogy and transfer : encoding the problem at the right level of abstraction. In : *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Cognitive Science Society. Stresa, Italy.* (pp. 1925–1930).

Sander, E., & Fort, C. (2014). Semantic ambiguity as basis for promoting learning in the case of arithmetic problem solving. In : *Proceedings of ICAP 2014, 28th international congress of applied psychology. 8–13 July 2014, Paris.*

Scheibling-Sève, C., Eichy, A., Pasquinelli, E., et al. (2016). Méthode d'apprentissage et évaluation en résolution de problèmes d'arithmétiques : outils progressifs pour développer la flexibilité des stratégies en résolution. In : *Communication au colloque international « Évaluation en mathématiques : dispositifs, validités et pratiques ». Université Paris Est, 21-22 novembre 2016.*

Schliemann, A. D., Araujo, C., Cassundé, M. A., et al. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal of Research in Mathematics Education*, *29*, 422–435.

Schoenfeld, A. H., & Herrmann, D. J. (1982). Problem perception and knowledge structure in expert and novice mathematical problem solvers. J Exp Psychol. : Learning. *Memory and Cognition*, *8*, 484–494.

Silver, E. A. (1981). Recall of mathematical problem information : solving related problems. *Journal of Research in Mathematics Education*, *12*, 54–64.

Staub, F. C., & Reusser, K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. In C. A. Weaver, S. Mannes, & C. R. Fletcher (Eds.), *Discourse comprehension : Essays in honor of Walter Kintsch* (pp. 285–305). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

Thevenot, C., & Barrouillet, P. (2015). Arithmetic word problem solving and mental representations. In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition*. Oxford : Oxford University Press.

Thevenot, C., Devidal, M., Barrouillet, P., et al. (2007). Why does placing the question before an arithmetic word problem improve performance? A situation model account. *Quarterly J Exp Psychol.*, *60*(1), 43–56.

Van Dijk, T. A., & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York : Academic Press.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and substraction : A cognitive perspective*. Hillsdale : Erlbaum.

Vershaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., et al. (2009). Conceptualizing, investigating and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*(3), 335–359.

Vicente, S., Orrantia, J., & Verschaffel, L. (2007). Influence of situational and conceptual rewording on word problem solving. *British J Educ Psychol.*, *77*(4), 829–848.

Lectures conseillées

Hofstadter, D., & Sander, E. (2013). Les analogies naïves. In D. Hofstadter & E. Sander (Eds.), *L'Analogie* (pp. 465–526). Paris : Odile Jacob.